SLUČAJNI ŠUM U TELEKOMUNIKACIONIM SISTEMIMA

- Šum je neizbježna slučajna pojava koja utiče na prenošeni signal, superponira se signalu poruke, te na taj način mijenja njegove vrijednosti i oblik.

- Šum je slučajna elektromagnetna pojava koja se javlja u svim sistemima i manifestuje se na različite načine. Npr. neželjeni i nepravilni zvučni efekti u slušalici; slučajna svjetlucanja na televizijskom ekranu; greške nastale pri prenosu podataka prouzrokovane su šumom;

- Šum kao pojava u prenosu signala ima veliki značaj, jer maskiranje signala šumom i greške koje on izaziva su stalno prisutni faktori koji degradiraju kvalitet veza i ograničavaju njihov domet.

Veliki je broj uzroka zbog kojih dolazi do pojave šuma, pa je saglasno tome napravljena i klasifikacija šumova različitog porijekla:

- šum ambijenta - šum koji postoji u prostoriji korespondenta i koji se transformacijom preko mikrofona prenosi u sistem;
- šum mikrofona - potiče od neregularnih struja koje protiču kroz mikrofon i kad nema signala;
- termički šum - vodi porijeklo od nepravilnog kretanja elektrona u provodnicima usled toplotnih efekata; javlja se u ***svim*** komunikacionim sistemima!!!
- šum izazvan nelinearnim izobličenjima složenih signala;
- šum nastao zbog linearnog preslušavanja iz niza kanala u jedan posmatrani kanal;
- atmosferski šum - izazvan prirodnim pražnjenjima u atmosferi;
- čovjekom izazvan šum - nastaje zbog varničenja i pražnjenja u električnim uređajima i postrojenjima itd.

PRIRODA TERMIČKOG ŠUMA I NJEGOVE MANIFESTACIJE

Termički šum predstavlja pojavu koja je svojstvena svim sistemima čija je apsolutna temperatura T veća od 0°K.

Po svojoj prirodi, termički šum predstavlja ogroman skup pojedinačnih slučajnih događaja, ali u njemu mogu da se pronađu izvjesne statističke regularnosti koje su od velikog značaja u proučavanju problema prenosa signala.
Jedan od parametara koji, u statističkom smislu, može dovoljno dobro opisati ovaj šum je njegova srednja snaga, tj. spektralna gustina srednje snage šuma.

SPEKTRALNA GUSTINA SREDNJE SNAGE TERMIČKOG ŠUMA

Spektralna gustina srednje snage termičkog šuma (bijelog, aditivnog, ili Gauss-ovog) je data izrazom:

$$p_N(f) = p_N = kT = const.$$

k - Bolcmanova konstanta k=1,38 10^{-23} J/K
T – apsolutna temperatura (u K)

Srednja snaga termičkog šuma u nekom opsegu učestanosti može se jednostavno odrediti:

$$\overline{P_N} = \int_{f_N}^{f_V} p_N(f)df = kT(f_V - f_N) = kTB$$

Srednja snaga termičkog šuma na konstantnoj temperaturi T zavisi samo od širine opsega B, a ne od učestanosti na kojoj se on nalazi!!!

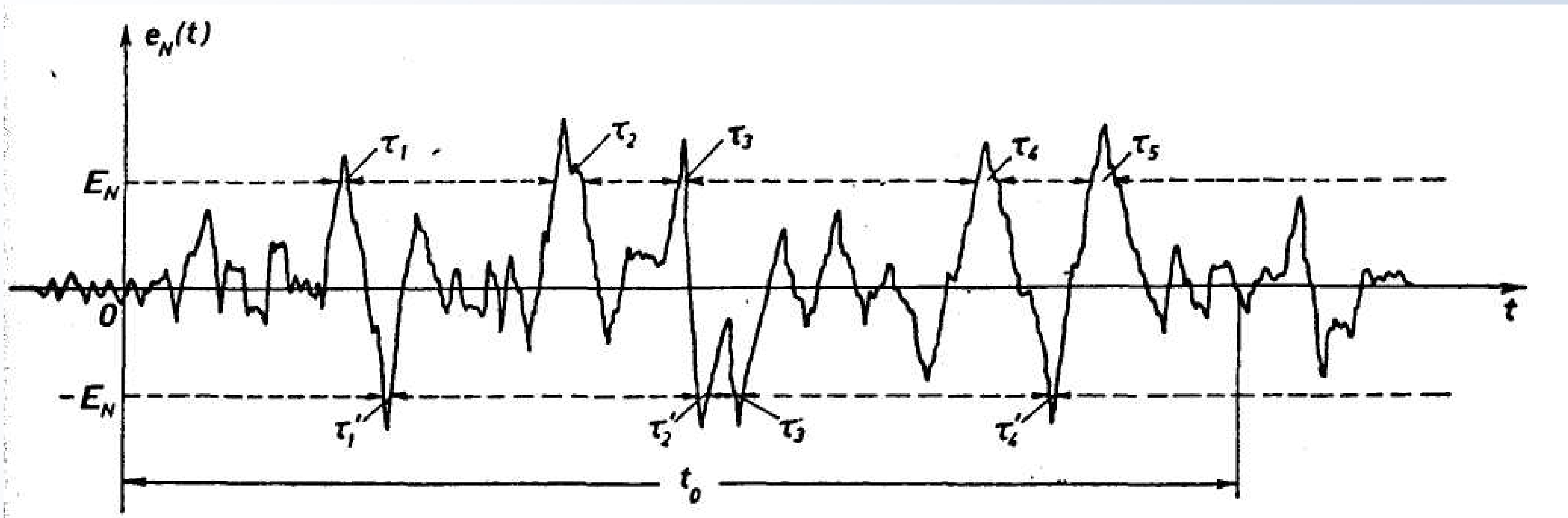
Pošto je spektralna gustina konstantna, za ovakav termički šum se kaže da je ravnomjerno raspodijeljen u spektru i često se naziva ***ravnim*** ili ***bijelim*** šumom, jer i bijelu svjetlost karakteriše uniformna raspodjela u vidljivom dijelu spektra.

RASPODJELA AMPLITUDA TERMIČKOG ŠUMA

Pomoću spektralne gustine srednje snage termičkog šuma lako može da se izračuna srednja snaga šuma u nekom određenom opsegu učestanosti. Na taj način spektralna gustina, odnosno srednja snaga, karakteriše šum kao slučajnu pojavu, ***u prosjeku,*** u jednom dugom intervalu vremena.
Takav podatak je od značaja, ali ne kazuje ništa o trenutnim vrijednostima slučajne vremenske funkcije koja opisuje šum (postoji veliki broj različitih vremenskih talasnih oblika koji imaju istu srednju snagu).
Potrebno je opisati funkciju šuma i u vremenskom domenu. To je moguće samo na osnovu ***statističkog pristupa*** problemu pomoću kojeg se može procijeniti kakva je raspodjela trenutnih vrijednosti šuma u jednom dugom vremenskom intervalu.

U suštini, ne može se ništa reći o trenutnoj vrijednosti šuma u nekom trenutku (to je osnovna osobina slučajnih funkcija), ali se može reći da je vjerovatnoća da će u nekom dijelu jednog dugog vremenskog intervala amplituda šuma biti veća od neke unaprijed specificirane vrijednosti.

Pretpostavimo da funkcija $e_N(t)$ sa slike predstavlja vremensku funkciju koja opisuje neki slučajan proces. Neka je t_0 interval u kome se analizira funkcija relativno dug.



Slika: Vremenska funkcija slučajnog procesa

Označimo sa e_N bilo koju trenutnu vrijednost funkcije $e_N(t)$. Tada e_N predstavlja slučajnu promjenljivu u skupu koji obrazuju trenutne vrijednosti ove funkcije iz intervala t_0.

Dio posmatranog vremena t_0 u kome je trenutna vrijednost $e_N > E_N$, E_N je neka unaprijed specificirana vrijednost, je:

$$\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_n$$

Vjerovatnoća da trenutna vrijednost šuma bude veća ili jednaka nekoj unaprijed specificiranoj vrijednosti je:

$$P(e_N \geq E_N) = \frac{\tau}{t_0}$$

Odnosno, vjerovatnoća da amplituda šuma bude manja od neke unaprijed specificirane vrijednosti je:

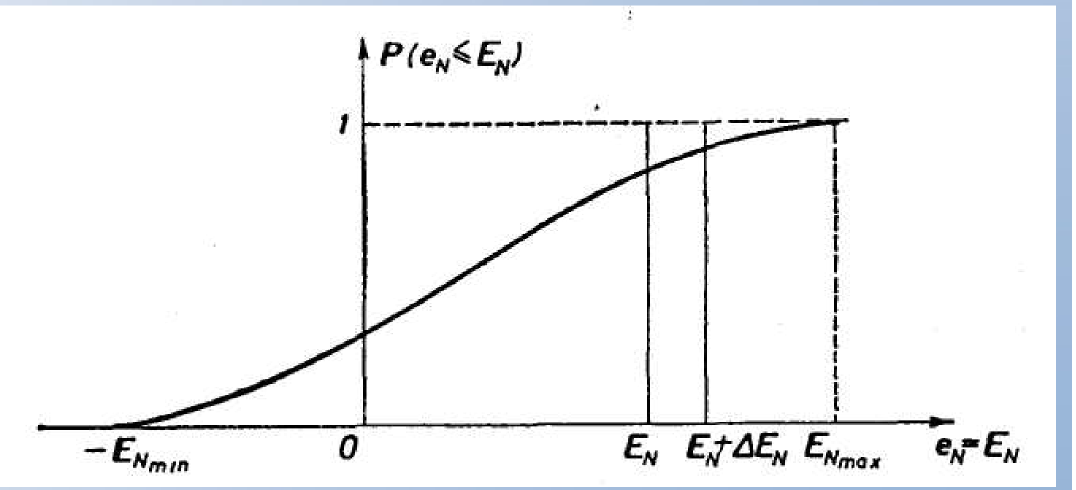
$$P(e_N < E_N) = 1 - \frac{\tau}{t_0} = \frac{t_0 - \tau}{t_0}$$

Specificirajući čitav niz vrijednosti E_N, $E_N = E_{Nl}$, E_{N2} ..., moguće je pronaći njima odgovarajuće vrijednosti $P(e_N \leq E_{N1})$, $P(e_N \leq E_{N2})$ itd.

Dijagram koji predstavlja zavisnost $P(e_N \leq E_N)$ od neke specificirane vrijednosti $e_N = E_N$, je kriva na slici.

E_{Nmax}- maksimalna vrijednost e_N u intervalu t_0,

-E_{Nmin}- minimalna vrijednost e_N u intervalu t_0

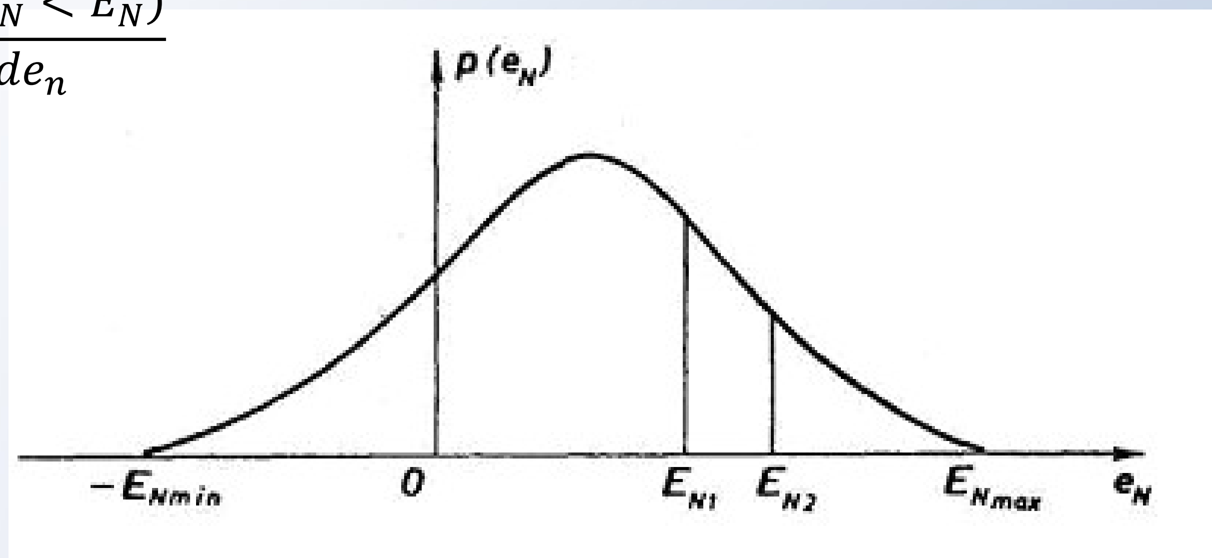


Slika: Funkcija raspodjele vjerovatnoće

Dobijena kriva koja predstavlja relativan iznos vremena u kome je $e_N \leq E_N$ naziva se ***kriva raspodjele funkcije*** $e_N(t)$, a veličina $P(e_N \leq E_N)$ ***funkcija raspodjele***.

Strmina krive raspodjele amplituda se zove ***funkcija gustine vjerovatnoće amplituda*** $e_N(t)$:

$$p(e_N) = \frac{dP(e_N < E_N)}{de_n}$$



Slika: Funkcija gustine vjerovatnoće

Vjerovatnoća da se trenutna vrijednost šuma e_N nalazi između vrijednosti E_{N1} i E_{N2} je:

$$P(E_{N1} \leq e_N \leq E_{N2}) = \int_{E_{N1}}^{E_{N2}} p(e_N)de_N$$

Važi:

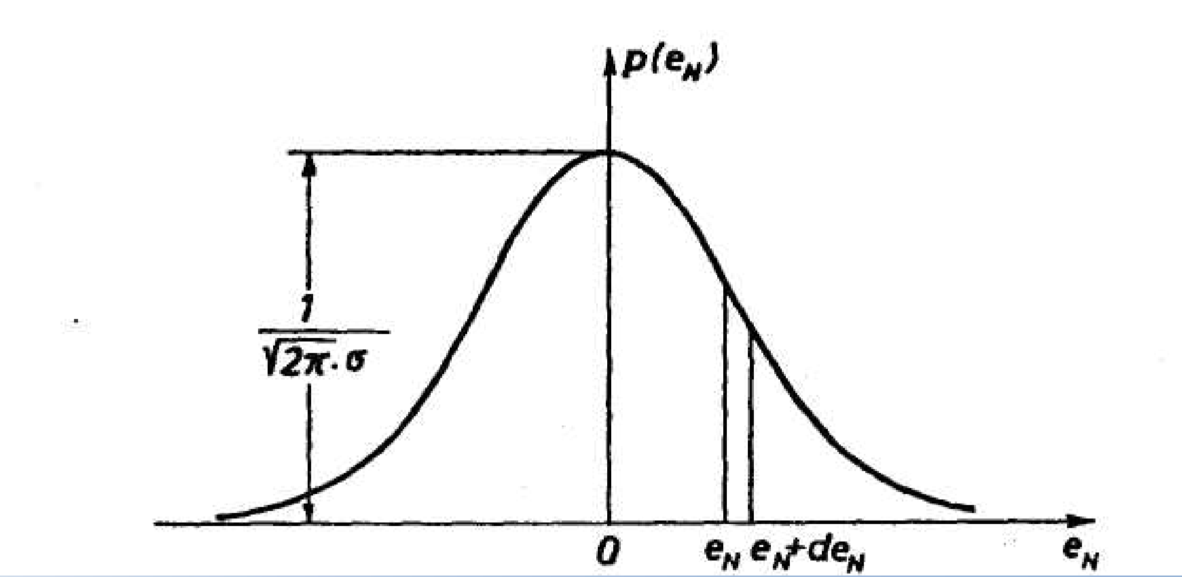
$$P(-E_{Nmin} \leq e_N \leq E_{Nmax}) = \int_{-E_{Nmin}}^{E_{Nmax}} p(e_N)de_N = 1$$

Srednja vrijednost napona termičkog šuma e_N(t) je:

$$\overline{e_N(t)} = \overline{e_N} = \lim_{t_0\to\infty} \frac{1}{2t_0} \int_{-t_0}^{t_0} e_N(t)dt$$

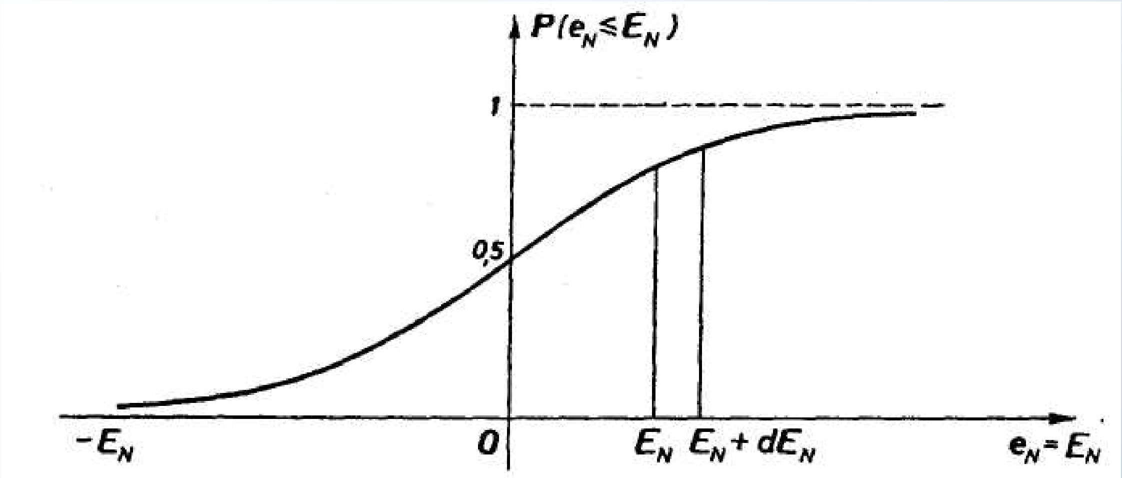
Ovakav zaključak je donijet intuitivno. Ako bi srednja vrijednost napona termičkog šuma bila različita od nule, tada bi voltmetar vezan za bilo koji uređaj u izolovanom sistemu pokazivao neku vrijednost različitu od nule, što nije moguće.
Razni eksperimenti su pokazali da funkcija raspodjele amplituda termičkog šuma slijedi **Gauss-ov** ili **normalni zakon raspodjele amplituda**.
Funkcija gustine vjerovatnoće je data izrazom:

$$p(e_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{e_N^2}{2\sigma^2}}$$



Slika: Gauss-ova funkcija gustine vjerovatnoće

Odgovarajuća funkcija raspodjele je:



Slika: Gauss-ova funkcija raspodjele vjerovatnoće

U izrazu za $p(e_N)$ σ =const. je standardna devijacija. Srednje kvadratno odstupanje slučajno promjenjive e_N od svoje srednje vrijednosti je varijansa:

$$\sigma^2 = \overline{(e_N - \overline{e_N})^2}$$

$$\sigma^2 = \overline{(e_N - \overline{e_N})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (e_N - \overline{e_N})^2 \, p(e_N) de_N =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e_N^2 \, p(e_N) de_N - 2\overline{e_N} \int_{-\infty}^{\infty} e_N p(e_N) de_N + (\overline{e_N})^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(e_N) de_N$$

- prvi integral predstavlja po definiciji srednju kvadratnu vrijednost slučajne promenljive;
- drugi integral jednak je srednjoj vrijednosti slučajne promjenljive;
- treći integral je jednak 1, pa je:

$$\sigma^2 = \overline{(e_N - \overline{e_N})^2} = \overline{e_n^2} - 2\overline{e_N}\,\overline{e_N} + (\overline{e_N})^2$$

Kako je:

$$\overline{e_N} = 0 \implies \sigma^2 = \overline{e_N^2} = E_{Neff}^2$$

- ***Centralna granična teorema***

Raspodjela vjerovatnoće sume velikog broja nezavisnih slučajnih veličina, od kojih svaka može imati bilo kakvu sopstvenu raspodjelu, teži Gauss-ovoj raspodjeli.

$$P(|e_N| \leq E_N) = P(-E_N \leq e_N \leq E_N) = \int_{-E_N}^{E_N} p(e_N)de_N = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{E_N} e^{-\frac{E_N^2}{2\sigma^2}}de_N$$

Integral tipa:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt = \mathrm{erf}(x)$$

je ***funkcija greške***. Konačno je:

$$P(|e_N| \le E_N) = P(-E_N \le e_N \le E_N) = \mathrm{erf}\left(\frac{E_N}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

Tražena vjerovatnoća (procenat vremena u kome je $|e_N| \ge E_N$) je:

$$P(|e_N| \ge E_N) = 1 - P(|e_N| \le E_N) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{E_N}{\sqrt{2}\sigma}\right) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{E_N}{\sqrt{2}E_{Neff}}\right) = erfc\left(\frac{E_N}{\sqrt{2}E_{Neff}}\right)$$

Procenat vremena u kome je amplituda napona termičkog šuma veća od efektivne vrijednosti napona šuma je:

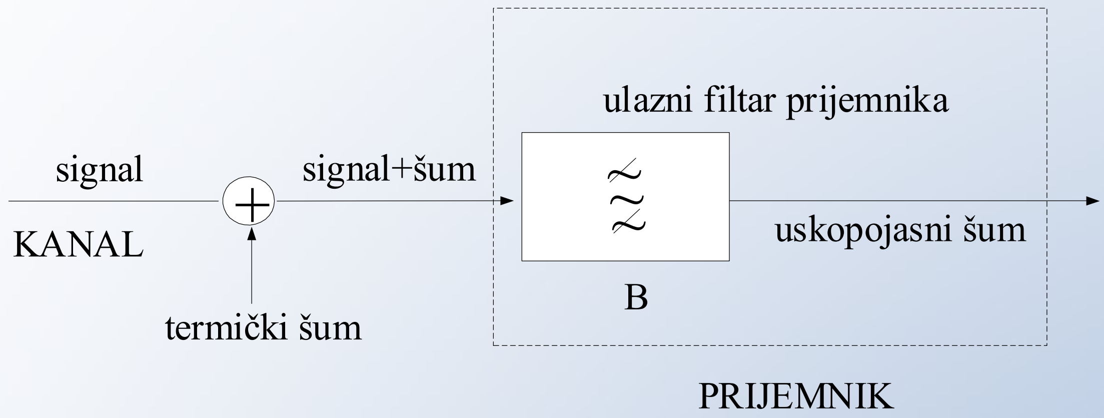
$$P(|e_N| \ge E_N) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$$

USKOPOJASNI SLUČAJNI ŠUM

Svi signali posle modulacije mogu se smatrati signalima čiji se spektar praktično nalazi u jednom konačnom opsegu učestanosti u okolini neke centralne učestanosti f_0. *Pri tome,* telekomunikacioni sistemi ili pojedinačni sklopovi kroz koje se prenose ovakvi signali predstavljaju ***propusnike opsega učestanosti*** (izlazni filtar u predajniku, ulazni filtar u prijemniku, međufrekvencijski pojačavači...).

Tokom prenosa i na ulazu u prijemnik, prenošenim signalima superponira se slučajan šum. Njegov spektar je mnogo širi od spektra korisnog signala. Zato je i osnovni zadatak prijemnog filtra da propusti signal i samo onoliko šuma koliko to diktira širina spektra signala. Pošto je širina tog spektra (širina propusnog opsega) relativno mala u odnosu na centralnu učestanost f_0, šum koji prođe kroz ovakve propusnike opsega naziva se ***uskopojasni šum***.

Ovakav šum je potrebno analitički opisati i odrediti neke njegove statističke karakteristike.



Prijemni filtar je podešen širini spektra signala, tako da on propušta signal, a ograničava šum.

Neka slučajna vremenska funkcija *n*(t) opisuje neki uskopojasni šum i neka se njegov spektar nalazi u opsegu učestanosti f_0-f_m do f_0+f_m. Taj slučajan proces se može opisati izrazom:

$$n(t) = n_c(t)\cos\omega_0 t + n_s(t)\sin\omega_0 t$$

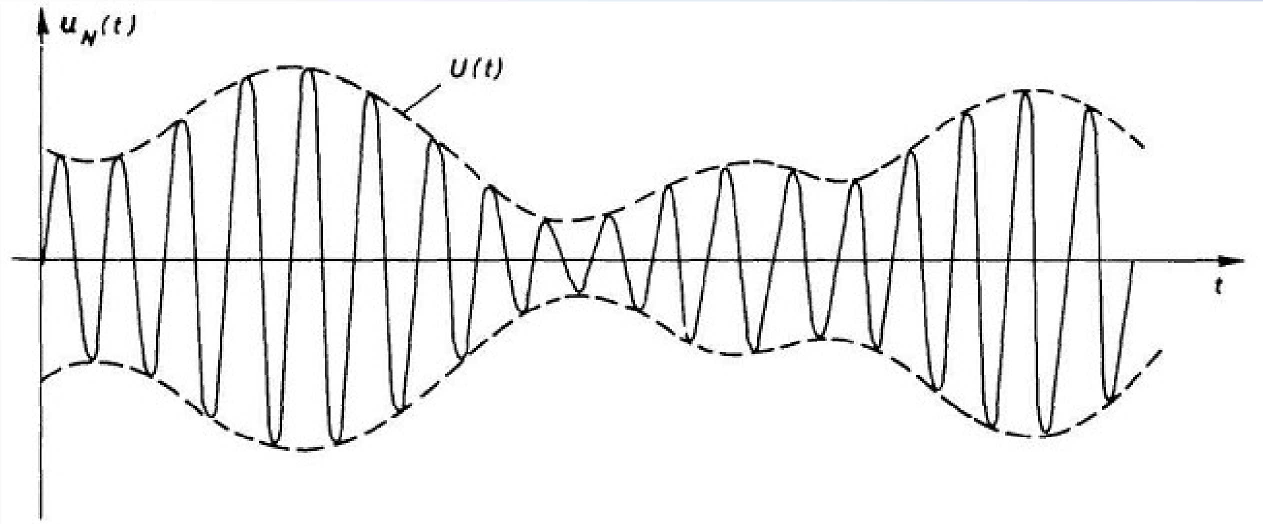
$n_c(t)$ i $n_s(t)$ su slučajni procesi sporo promjenljivog karaktera i nazivaju se ***komponente šuma u kvadraturi.*** Njihov spektar je ograničen i nalazi se u opsegu učestanosti od 0 do f_m. Srednje kvadratne vrijednosti šuma i njegovih komponenti su međusobno jednake, tj:

$$\overline{n^2(t)} = \overline{n_c^2(t)} = \overline{n_s^2(t)}$$

Snage komponenata su međusobno jednake i izjednačene su sa snagom šuma.

STATISTIČKE KARAKTERISTIKE USKOPOJASNOG ŠUMA

Kada se slučajan šum propusti kroz filtar propusnik opsega učestanosti čija je širina propusnog opsega $B=2f_m<<f_0$, na izlazu se dobija šum koji možemo predstaviti kao kosinusoidu promjenjive anvelope i faze, kao na slici.



$$n(t) = n_c(t)\cos\omega_0 t + n_s(t)\sin\omega_0 t = U(t)\cos[\omega_0 t - \psi(t)] = u_N(t)$$

$$U(t) = \sqrt{n_c^2(t) + n_s^2(t)}$$

$$\psi(t) = \mathrm{arctg}\frac{n_s(t)}{n_c(t)}$$

$n_c(t)$ i $n_s(t)$ su Gauss-ovi slučajni procesi čije su funkcije gustine vjerovatnoće:

$$p(n_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n_c^2}{2\sigma^2}}$$

$$p(n_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n_s^2}{2\sigma^2}}$$

$$\sigma_{n_s}^2 = \overline{n_s^2(t)} = \sigma_{n_c}^2 = \overline{n_c^2(t)} = \sigma^2 = \overline{n^2(t)}$$

Kako su slučajne promjenljive n_c i n_s nezavisne, združena funkcija gustine vjerovatnoće može se odrediti na sledeći način:

$$p_{cs}(n_c, n_s) = p(n_c)p(n_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{n_c^2+n_s^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}}$$

Moguće je naći funkciju združene gustine vjerovatnoće dvije slučajne promjenljive koje predstavljaju amplitudu i fazu $q(U, \psi)$.

Vjerovatnoća da se amplituda komponente $n_c(t)$ nalazi između n_c i $n_c + dn_c$ i amplituda komponente $n_s(t)$ između n_s i $n_s + dn_s$ jednaka je vjerovatnoći da se amplituda anvelope $U(t)$ nalazi između U i $U + dU$, a faza $\psi(t)$ između ψ i $\psi + d\psi$:

$$p_{cs}(n_c, n_s) = dn_c dn_s = q(U, \psi) dU d\psi$$

$$n_c = U cos\psi$$

$$n_s = U sin\psi$$

n_c i n_s predstavljaju koordinate pravougaonog koordinatnog sistema, dok U i ψ odgovaraju koordinatama u polarnom sistemu. Izjednačavajući elementarnu površinu u jednom i drugom sistemu dobija se:

$$dn_c dn_s = U dU d\psi \quad \Longrightarrow$$

$$q(U, \psi) = \begin{cases} \dfrac{U}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}}, & U \geq 0 \; i \; \psi \leq 2\pi \\ 0 \quad , & \text{van navedenih granica} \end{cases}$$

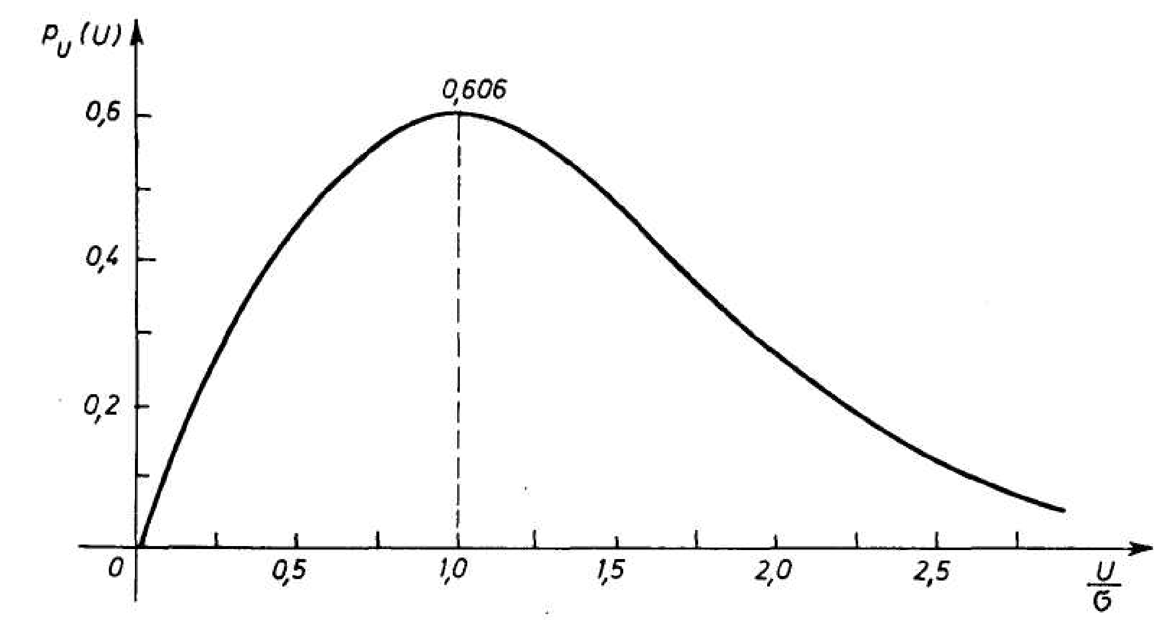
Na osnovu ovog izraza mogu lako da se odrede funkcije gustine vjerovatnoće amplitude anvelope U i faze ψ :

$$p_U(U) = \int_0^{2\pi} q(U,\psi)d\psi; \quad p_\psi(\psi) = \int_0^{2\pi} q(U,\psi)dU;$$

$$p_U(U) = \begin{cases} \frac{U}{\sigma^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}}, U \geq 0 \\ 0, \qquad\qquad U < 0 \end{cases}$$

$$p_\psi(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, \qquad 0 \leq \psi \leq 2\pi \\ 0, \qquad\qquad \text{drugdje} \end{cases}$$

Funkcija gustine vjerovatnoće $p_U(U)$ karakteriše *Rayleigh-evu raspodjelu* i prikazana je na slici:

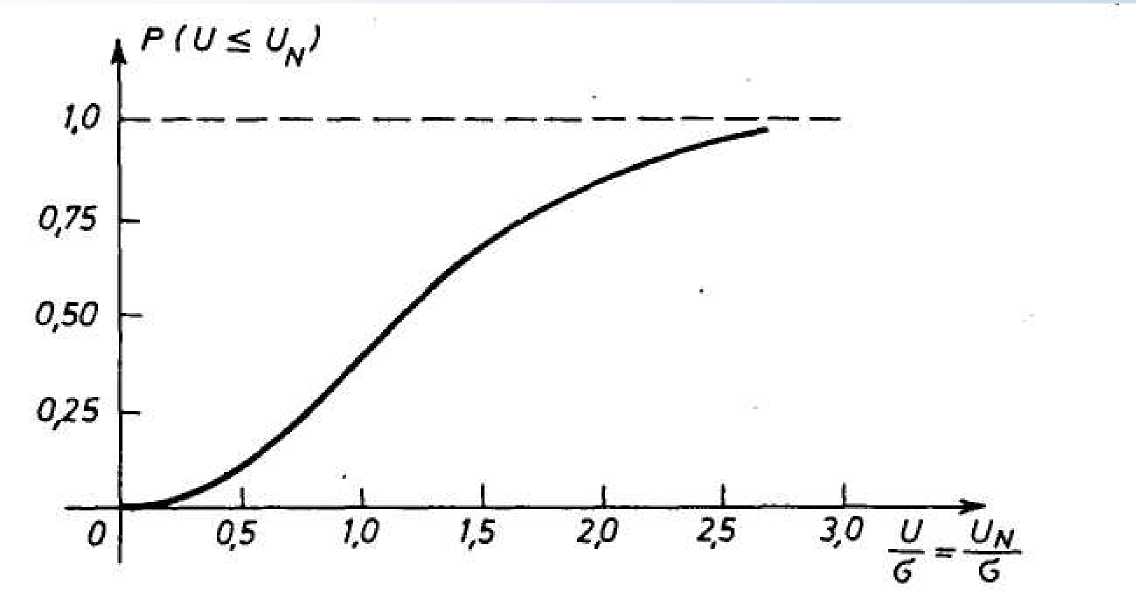


Slika: Rayleigh-eva funkcija gustine vjerovatnoće

Vjerovatnoća da amplituda anvelope uskopojasnog šuma bude manja od neke specificirane vrijednosti U_N je:

$$P(U \leq U_N) = \int_0^{U_N} p_U(U)dU = \int_0^{U_N} \frac{U}{\sigma^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}} dU = 1 - e^{-\frac{U_N^2}{2\sigma^2}}$$

Dobijeni izraz predstavlja *Rayleigh*-evu raspodjelu koja je prikazana na slici:



Slika: Rayleigh-eva funkcija raspodjele vjerovatnoće

Srednja vrijednost amplitude U je:

$$\overline{U} = \int_0^{\infty} U p_U(U)dU = \int_0^{\infty} \frac{U^2}{\sigma^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}} dU = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma = 1{,}25\sigma$$

Srednja kvadratna vrijednost slučajne promjenljive U je:

$$\overline{U^2} = \int_0^\infty U^2 p_U(U)dU = \int_0^\infty \frac{U^3}{\sigma^2} e^{-\frac{U^2}{2\sigma^2}} dU = 2\sigma^2$$

Efektivna vrijednost slučajne promjenljive U je:

$$U_{eff} = \sqrt{\overline{U^2}} = \sqrt{2}\,\sigma$$

Jasno je da parametri slučajnog procesa (srednja vrijednost i srednja kvadratna vrijednost) zavise od statističke raspodjele.